

Optimisation

I - Aire maximum dans le triangle

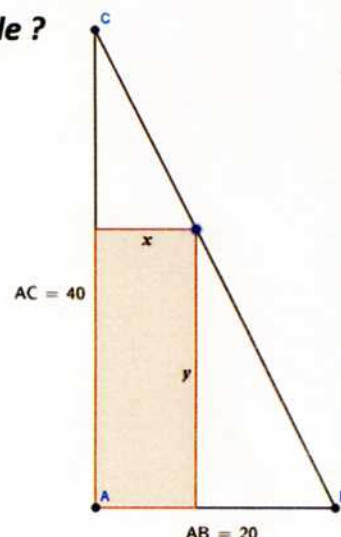
Quelles sont les longueurs x et y qui permettent d'obtenir l'aire la plus grande ?

1 - Relation entre x et y :

La propriété de Thalès donne : $\frac{x}{20} = \frac{40-y}{40}$

En déduire la relation qui permet d'exprimer y en fonction de x :

$$x = \frac{40-y}{2} \Rightarrow 2x = 40-y \Rightarrow y = 40-2x$$



2 - Exprimer l'aire A en fonction de x et de y :

$$A = xy$$

3 - Utiliser le résultat de la question 1 pour remplacer y dans la relation de la question 2 et obtenir A en fonction de x seulement :

$$A = x(40-2x) = 40x - 2x^2$$

$$A = -2x^2 + 40x$$

4 - Trouver maintenant la valeur de x qui rend A maximum

$$A' = -4x + 40$$

$$A' = 0 : -4x + 40 = 0$$

$$-4x = -40$$

$$x = \frac{-40}{-4}$$

$$x = 10$$

x	0	10	20
		+	-
		200	

$$A'(0) = 40$$

$$A'(20) = -40$$

$$A(10) = 200$$

l'aire sera maximum ($A = 200$) pour

$$x = 10$$

$$\text{et } y = 20$$

II – Utiliser moins de tôle

Un industriel doit construire une benne de 400 m^3 . Il cherche les dimensions x et y pour utiliser le moins de tôle possible.

1 – Exprimer le volume V en fonction de x et y :

$$V = x^2 y$$

2 – On sait que $V = 400 \text{ m}^3$, exprimer y en fonction de x :

$$400 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{400}{x^2}$$

3 – Calculer A , l'aire de la surface de tôle nécessaire en fonction de x et y :

$$A = 2x^2 + 3xy$$

4 – Utiliser les résultats des deux questions précédentes pour remplacer y et trouver A en fonction de x seulement :

$$A = 2x^2 + 3x \cdot \frac{400}{x^2}$$

5 – Simplifier A :

$$A = 2x^2 + \frac{1200}{x}$$

6 – Trouver x pour que A soit minimum :

$$A' = 4x - \frac{1200}{x^2}$$

$$A' = 0$$

$$4x = \frac{1200}{x^2}$$

$$x^3 = 300$$

$$x = 300^{\frac{1}{3}} \approx 6,7$$

x	0	6,7	20
A'	-	0	+
A		269	

$$A'(6,7) = 4 - 1200 < 0$$

$$A'(20) = 77 > 0$$

7 – Donner les dimensions de la benne et l'aire de la surface de tôle :



$$A = 269 \text{ m}^2$$

III – Optimiser la boîte de conserve

Les grosses boîtes de conserve ont un volume de 850 cm^3 . Quelles doivent-êre les dimensions pour utiliser le moins de tôle pour la fabrication ?



1 – LE VOLUME :

a – Exprimer le volume V en fonction de x et y :

$$V = \pi x^2 y$$

b – On sait que $V = 850 \text{ m}^3$, exprimer y en fonction de x :

$$850 = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{850}{\pi x^2}$$

2 – L'aire :

a – Les trois parties

$$A_1 = \pi x^2$$

$$A_2 = 2\pi x y$$

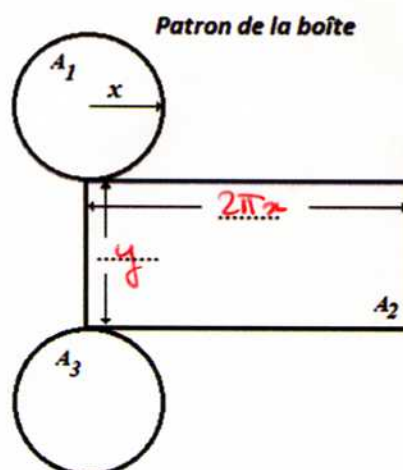
$$A_3 = \pi x^2$$

b – Exprimer A_2 en fonction de x seulement :

$$A_2 = 2\pi x \times \frac{850}{\pi x^2} \Rightarrow A_2 = \frac{1700}{x}$$

c – Exprimer maintenant A en fonction de x :

$$A = 2\pi x^2 + \frac{1700}{x}$$



3 – Recherche de A minimum :

$$A' = 4\pi x - \frac{1700}{x^2}$$

$$A' = 0 :$$

$$4\pi x = \frac{1700}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{1700}{4\pi}$$

$$x = \left(\frac{1700}{4\pi}\right)^{1/3} = 5,13 \text{ cm}$$

x	0	5,13	10
A'	-	0	+
A			

$$A'(1) = -1687,43 < 0$$

$$A'(10) = 108,67 > 0$$

Conclusion :



Diamètre $\approx$ Hauteur