

Exercices polynômes de degré 3

Exercice 1 :

Voici un polynôme :

$$y = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

$x \in [-3; 4]$

- 1) Déterminer les racines de $y = 0$

Numworks : $x_1 = -2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 3$

- 2) Résoudre $y = 5$

$$y = 5 \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 5$$

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 7 = 0 \leftarrow \text{On cherche donc les racines de ce polynôme}$$

Numworks : $x_1 \approx 1,82$ $x_2 \approx 0,6$ $x_3 \approx 3,22$

- 3) Calculer la fonction dérivée

$$y' = 6x^2 - 8x - 10$$

les racines sont les valeurs de x qui rendent y' nulle

- 4) Utiliser le résultat précédent pour dresser un tableau de variation et indiquer s'il y a un ou plusieurs extremums, préciser alors pour quelle valeur de x et la valeur de chaque extremum.

Racines de $6x^2 - 8x - 10$: $x_1 \approx -0,79$ $x_2 \approx 2,12$

x		-0,79		2,12	
signe de V'	+	0	-	0	+
V		↗	↘	↗	

$a = 6$. donc $a > 0$.

← donc positif à l'extérieur des racines.

Il y a un maximum en $x = -0,79$ qui vaut :

$$y(-0,79) = 2 \times (-0,79)^3 - 4 \times (-0,79)^2 - 10 \times (-0,79) + 12 \approx 16,42$$

Il y a un minimum en $x = 2,12$ qui vaut :

$$y(2,12) = 2 \times 2,12^3 - 4 \times 2,12^2 - 10 \times 2,12 + 12 \approx -8,12$$

Exercice 2:

Voici un polynôme :

$$y = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

$x \in [-5; 3]$

1) Déterminer les racines de $y = 0$

(Numworks) : $x_1 = -4$ $x_2 = -1$ $x_3 = 2$

2) Résoudre $y = 6$

$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 6 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x - 14 = 0$
on cherche les racines de \curvearrowright

(Numworks) : $x_1 \approx -3,58$ $x_2 \approx -1,71$ $x_3 \approx 2,29$

3) Calculer la fonction dérivée

$$y' = 3x^2 + 6x - 6$$

4) Utiliser le résultat précédent pour dresser un tableau de variation et indiquer s'il y a un ou plusieurs extremums, préciser alors pour quelle valeur de x et la valeur de chaque extremum.

Racines de $3x^2 + 6x - 6$: $x_1 \approx -2,73$ $x_2 \approx 0,73$

x		-2,73		0,73		
signe de V'		+	0	-	0	+
V		\nearrow		\searrow		\nearrow

$a = 3 > 0$
 \leftarrow

Il y a un maximum en $x = -2,73$ qui vaut

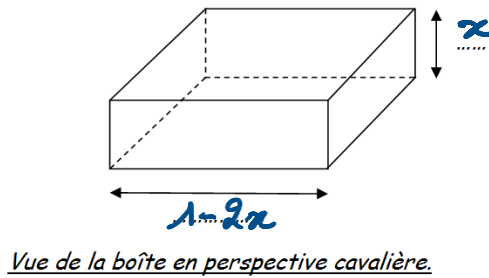
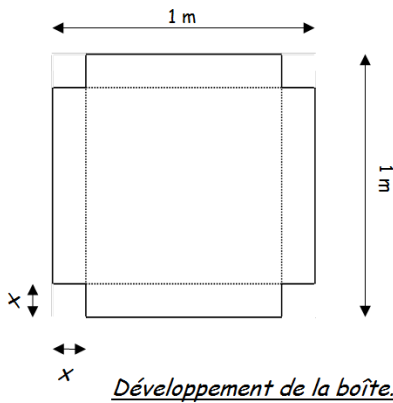
$$y(-2,73) = (-2,73)^3 + 2x(-2,73)^2 - 6x(-2,73) - 8 \approx 10,39$$

Il y a un minimum en $x = 0,73$ qui vaut

$$y(0,73) = (0,73)^3 + 2x(0,73)^2 - 6x(0,73) - 8 \approx -10,39$$

Exercice 3:

Pour fabriquer une boîte à partir d'une plaque carrée de côté 1 m, on découpe aux 4 sommets un carré de côté x .



Volume = hauteur \times largeur \times longueur

1 – Montrer que $V = 4x^3 - 4x^2 + x$

$$V = x(1-2x)(1-2x)$$

$$V = x(1 - 2x - 2x + 4x^2)$$

$$V = x(4x^2 - 4x + 1)$$

$$V = 4x^3 - 4x^2 + x$$

2 – Déterminer pour quelle valeur de x le volume V sera maximum.

$$V' = 12x^2 - 8x + 1 \quad \text{racines de } V': \quad x_1 \approx 0,17 \quad x_2 = 0,5$$

x	0,17		0,5	
signe de V'	+	0	-	+
V	↗		↘	↗

$$a = 12 > 0$$

← valeur maxi que peut atteindre x

le volume maximum est atteint pour $x = 0,17$ m et

vaut :

$$V(0,17) = 4 \times 0,17^3 - 4 \times 0,17^2 + 0,17 = 0,074 \text{ m}^3$$

Pour une hauteur de 17 cm le volume maxi est de 74 L.

Exercice 4 :

Voici un polynôme :

$$y = 2x^3 + 6x^2 - 26x - 30$$

$x \in [-6; 4]$

1) Déterminer les racines de $y = 0$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 3$$

2) Résoudre $y = 20$

$$2x^3 + 6x^2 - 26x - 30 = 20 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 - 26x - 50 = 0$$

-20 -20

réponse :

racines :

$$\begin{aligned} x_1 &\approx -4,64 \\ x_2 &\approx -1,64 \\ x_3 &\approx 3,28 \end{aligned}$$

3) Calculer la fonction dérivée

$$y' = 6x^2 + 12x - 26$$

4) Utiliser le résultat précédent pour dresser un tableau de variation et indiquer s'il y a un ou plusieurs extremums, préciser alors pour quelle valeur de x et la valeur de chaque extremum.

racines de y' : $x_1 \approx -3,31 \quad x_2 \approx 1,31$

x		$-3,31$		$1,31$		
signe de V'		+	0	-	0	+
V		↗		↘	↗	

$a = 6 > 0$
⇓

Il y a un maximum en $x = -3,31$ qui vaut

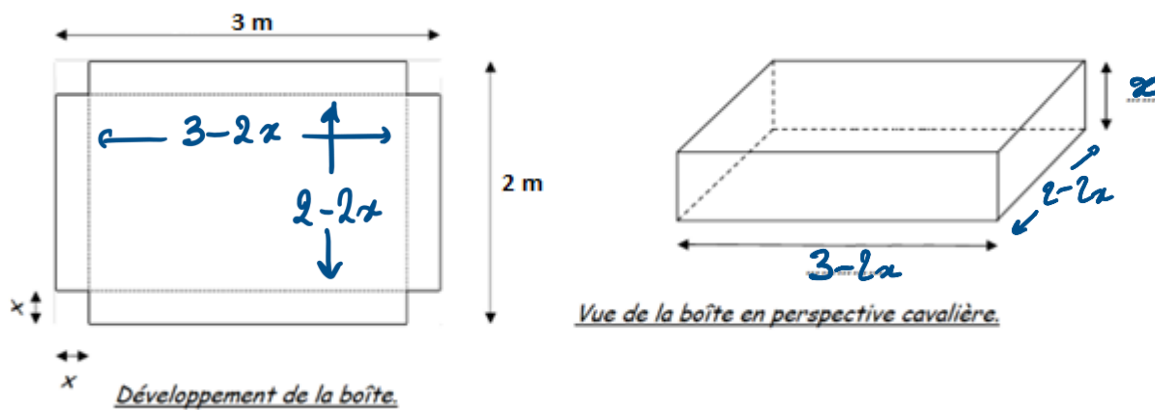
$$y(-3,31) = 2x(-3,31)^3 + 6x(-3,31)^2 - 26x(-3,31) - 30 \approx 49,27$$

Il y a un minimum en $x = 1,31$ qui vaut

$$y(1,31) = 2x(1,31)^3 + 6x(1,31)^2 - 26x(1,31) - 30 \approx -49,27$$

Exercice 5 :

Pour fabriquer une boîte à partir d'une plaque rectangulaire de 3 m × 2 m, on découpe aux 4 sommets un carré de côté x.



1 – Montrer que $V = 4x^3 - 10x^2 + 6x$

$$V = x(3-2x)(2-2x)$$

$$V = x(6 - 6x - 4x + 4x^2) = x(4x^2 - 10x + 6) = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

2 – Déterminer pour quelle valeur de x le volume V sera maximum.

$$V' = 12x^2 - 20x + 6 \quad \text{racines de } V': \quad x_1 \approx 0,39 \quad x_2 \approx 1,27$$

x	0,39		1,27		
signe de V'	+	0	-	0	+
V	↗		↘		↗

$a = 12 > 0$

limite possible pour la valeur de x.

V maximum est atteint pour $x = 0,39$ et il vaut:

$$V(0,39) = 4 \times 0,39^3 - 10 \times 0,39^2 + 6 \times 0,39 \approx 1,056$$

Pour une hauteur de 39 cm le conteneur aura un volume maximum de 1,056 m³ donc 1056 L.