

Les logarithmes et exponentielles

I – Introduction

Utiliser une calculatrice pour compléter : (arrondi de précision à 0,1)

$$\ln(10) = 2,3$$

$$\log(10) = 1$$

$$e^2 = 7,4$$

$$\ln(2) = 0,7$$

$$\log(2) = 0,3$$

$$e^{20} = 485,165,195,4$$

$$\ln(5) = 1,6$$

$$\log(5) = 0,7$$

$$e^{200} = 7,26 \times 10^{86}$$

$$\ln(-10) = \times$$

$$\log(-10) = \times$$

$$e^{-10} = 4,5 \times 10^{-5}$$

$$\ln(-2) = \times$$

$$\log(-2) = \times$$

$$e^{0,1} = 1,1$$

$$\ln(0) = \times$$

$$\log(0) = \times$$

$$\log(-10) = \times$$

$$\log(0,01) = -2$$

$$\ln(200) = 5,3 \leftrightarrow e^{5,3} = 200$$

$$\log(1000) = 3 \leftrightarrow 10^3 = 1000$$

remarques

- $\ln(a)$: a doit être positif strictement
- si $\ln a = b$ alors $a = e^b$ (réciproque!)
- si $\log a = b$ alors $a = 10^b$ (réciproque!)
- e^x grandit très vite avec x (croissance exponentielle)
- $10 = 2 \times 5$ { et $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$
 { et $\log 10 = \log 2 + \log 5$
- les logarithmes "transforment la multiplication en somme"

II Propriétés

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

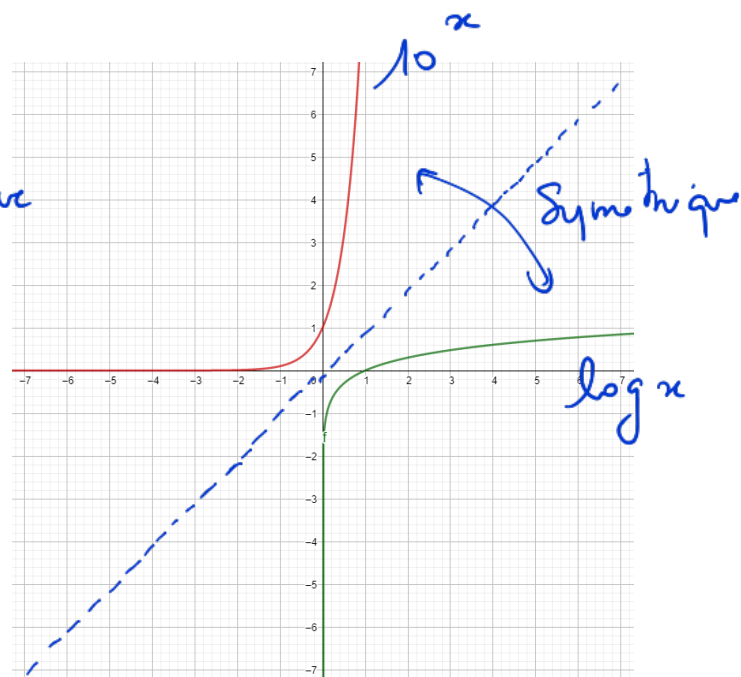
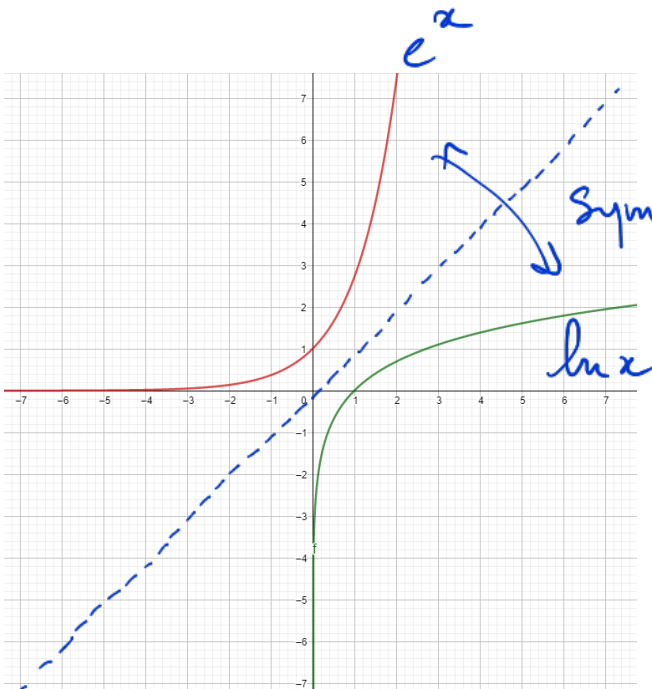
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\log(a^n) = n \log a$$

III Représentations graphiques



remarques

e^x est la fonction réciproque de $\ln x$
 10^x " " " " " $\log x$

Deux fonctions réciproques ont des courbes symétriques par rapport à la droite en pointillés.

e^x et 10^x sont des fonctions exponentielles, elles croissent extrêmement vite.

IV Résoudre une équation

Résoudre une équation qui contient un logarithme ou une exponentielle repose soit sur une propriété, soit sur les fonctions réciproques. Voici des exemples représentatifs

$$e^x = 6$$

$$\cancel{\ln e^x} = \ln 6 \quad \text{ln et } e^x \text{ sont des fonctions réciproques, l'une "annule" l'autre}$$

$$x = \ln 6 \approx 1,79$$

$$2^x = 4$$

$$\ln 2^x = \ln 4 \quad \text{On utilise la propriété } \ln a^m = m \ln a$$

$$x \ln 2 = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$$

$$\ln(x+2) = 3$$

$$\cancel{e^{\ln(x+2)}} = e^3 \quad \text{exponentielle "annule" ln.}$$

$$x+2 = e^3$$

$$x = e^3 - 2$$

$$x \approx 18,09$$

$$0,9e^{-0,6t} = 0,5$$

$$e^{-0,6t} = \frac{0,5}{0,9} \quad t = \frac{\ln\left(\frac{0,5}{0,9}\right)}{-0,6}$$

$$\cancel{\ln e^{-0,6t}} = \ln\left(\frac{0,5}{0,9}\right) \quad t \approx 0,98$$

$$-0,6t = \ln\left(\frac{0,5}{0,9}\right)$$