Probabilités

I – Introduction

On lance une pièce 50 fois.

On compte ci-dessous les « pile » et les « face »

Ici vous comptez vos lancers.

Nombre de « pile »	Nombre de « face »
10 lancers	

22 piles + 28 faces = 50

On regroupe ensuite les résultats de la classe :

Nom	Nombre de « pile »	Nombre de « face »
Elève 1	22	28
Elève 2	28	22
Elève 3	24	26
Elève 4	21	29
Elève 5	27	23
Elève 6	30	20
Elève 7	23	27
Elève 8	28	22
Elève 9	25	25
Elève 10	26	24
Elève 11	20	30
Elève 12	21	29
Prof	22	28
TOTAL	317	333

Remarques

……13…… personnes ont lancé une pièce ……50…… fois chacune. On a donc lancé une pièce ……650…… fois au total. On a obtenu à nous tous ……317…… fois « pile »

Le pourcentage de « pile » obtenu est donc :

$\frac{317}{650} = 0{,}488$ donc $48{,}8\%$

II – Définitions

Nous allons répondre aux questions ci-dessous en utilisant les résultats obtenus par tous dans le paragraphe précédent.

1) Probabilité

La probabilité c'est ce qu'on devrait obtenir : « J'ai combien de chances sur combien ? »

j'ai 1 chance sur 2 d'obtenir "pile"

Ici, la **probabilité p** d'obtenir « pile » est : $p = \frac{1}{2} = 0,5$ $(0,50 = 50\%)$

2) Fréquence

La **fréquence f** c'est ce qu'on a réellement obtenu : « On a obtenu 317 fois « pile » sur 650 lancers »

Ici, la **fréquence** obtenue est donc : $f = \frac{317}{650} \simeq 0,488$ $(48,8\%)$

3) Effectif (nombre d'épreuves)

L'**effectif** c'est le nombre de lancers ici, on le note **n** : 650

EXERCICE : On lance 120 fois une pièce de monnaie. On obtient « face » 64 fois.

1) Quelle est la valeur de n ? effectif : n = 120
2) Calculer la probabilité d'obtenir « face » : $p = \frac{1}{2} = 0,5$
3) Calculer la fréquence obtenue : $f = \frac{64}{120} \simeq 0,53$ (53%)

J'avais 1 chance(s) sur 2 d'obtenir « face » donc une probabilité de 0,5 ce qui correspond à 50 % de chances. Je l'ai obtenu 64 fois sur 120 donc avec une fréquence de 0,53 ce qui correspond à 53 %.

4) Exercices

Exercice 1

On lance un dé (normal à 6 faces) 400 fois. On obtient le "6" 68 fois.

1) Calculer la probabilité d'obtenir la face "6": $p = \frac{1}{6} \simeq 0{,}17$
2) Calculer la fréquence qu'on a obtenu : $f = \frac{68}{400} = 0{,}17$
3) Pensez-vous qu'on puisse dire que le dé est truqué ? NON
4) Expliquez pourquoi : on obtient ce qu'on attendait : $f = p$!

Exercice 2

Une urne contient 4 boules vertes et 16 boules noires.

1) Calculer la probabilité d'obtenir une boule verte :

$p = \frac{4}{20} = 0{,}20$

On tire 50 fois une boule, on note la couleur obtenue et on remet la boule à chaque fois avant de mélanger. On a obtenu 9 fois une boule verte.

2) Calculer la fréquence de sortie d'une boule verte lors de ces 50 tirages :

$f = \frac{9}{50} = 0{,}18$ (18%)

Exercice 3

Une urne contient des boules rouges et des boules bleues. On effectue 2000 tirages successifs. On a obtenu 594 boules rouges et 1406 boules bleues.

3) Calculer la fréquence de sortie d'une boule rouge lors de ces 2000 tirages : $f = \frac{594}{2000} = 0{,}297$
4) Peut-on dire qu'il y a plus de boules rouges que de boules bleues dans l'urne ? NON

L'urne contient 10 boules au total. Parmi ces deux hypothèses, laquelle vous semble la plus probable ? Pourquoi ?

- **"Il y a 1 boule rouge et 9 boules bleues"** → $p(\text{"rouge"}) = \frac{1}{10} = 0{,}1$
- **"Il y a 3 boules rouges et 7 boules bleues"** → $p(\text{"rouge"}) = \frac{3}{10} = 0{,}3$

f obtenu (0,297) est très proche de p pour le 2e cas, il y a donc certainement 3 boules rouges et 7 boules bleues.

III – Calculer une probabilité

1) Vocabulaire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est dû au hasard

Une issue est un des résultats possibles.

Un événement est un ensemble d'issues possibles

Exemple :

On lance un dé (normal à 6 faces)

L'événement « Obtenir un nombre pair » peut se noter de deux façons différentes :

" Obtenir un nombre pair "

$\{2 ; 4 ; 6\}$

Cet événement est constitué de 3 issues : 2 ; 4 et 6

2) Calcul de probabilité

Pour calculer une probabilité on utilise le principe :

$$p = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ total}$$

Exemple :

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues.

Calculer p(A) la probabilité de l'événement « Tirer une boule rouge » :

nombre de cas favorables : 4 boules rouges

$$p(A) = \frac{4}{10} = 0,4$$

nombre de boules au total.

IV – Grands effectifs

Dans le premier exemple ci-dessus, si on lance le dé beaucoup plus (200 fois, 1000 fois, 2000 fois…) la fréquence obtenue se rapprochera de la probabilité. C'est toujours comme ça, on dit que :

f tend vers p

Cette propriété a des conséquences importantes :

- Plus je lance une pièce de monnaie, plus je m'approcherai de 50% de "pile"
- Plus je lance un dé, plus je m'approcherai de 16,67 % de face 6. (*)

(*) Détail du calcul : pièce : $p = \frac{1}{2} = 0,5$ dé : $p = \frac{1}{6} \simeq 0,1667$

Voici deux exemples d'utilisation de cette propriété dans la vie courante

- Si un assureur sait qu'en moyenne un accident lui coûte 10 000 € et qu'un véhicule a 0,5% de risques d'avoir un accident dans l'année, alors s'il assure 2000 véhicules, il peut prévoir qu'il y aura :

  $\frac{0,5}{100} \times 2000 = 10$ accidents

  Ça lui coûtera donc au total

  $10 \times 10\,000 = 100\,000$ euros.

  S'il ne veut pas perdre d'argent, on peut donc calculer la cotisation de chaque assuré :

  $\frac{100\,000}{2000} = 50$ € euros .

  S'il veut encaisser un bénéfice de 200 000 €, de combien doit-il augmenter la cotisation de chaque assuré ?

  il doit gagner 100 000 € de plus donc demander $\frac{100\,000}{2000} = 50$
  50 € de plus à chaque assuré donc $50 + 50 = 100$ € au total.

  Ce calcul fonctionne assez bien à condition d'assurer beaucoup de monde !

- Les compagnies aériennes savent que sur certains vols, la totalité des passagers ne se présentent pas à l'embarquement. Un calcul basé sur les statistiques et les probabilités permet de déterminer combien de places on peut vendre en surplus… avec un risque calculé !