Les polynômes du second degré

I – Définition

Polynôme du second degré

Un polynôme du second degré est une fonction du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemple :

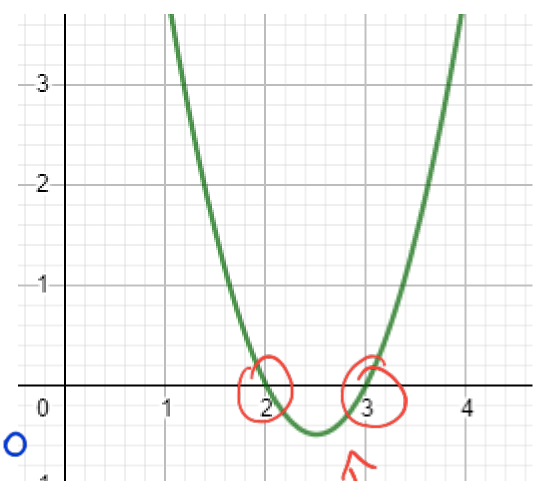
$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

Dans ce cas on a a = 2 b = −10 c = 12

II – Racines

On appelle **racine** d'un polynôme du second degré :

une valeur de x qui donne 0 comme résultat



$$2x^2 - 10x + 12$$

Quand on cherche ces racines on "résout" $2x^2-10x+12=0$

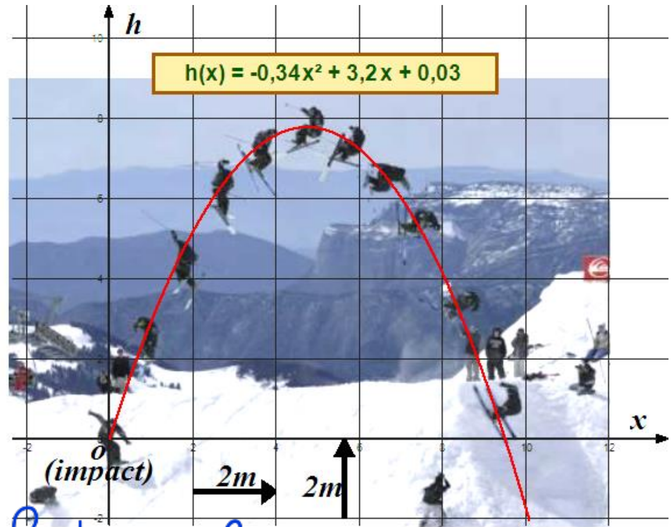
Utiliser "géogebra" et résoudre $2x^2 - 10x + 12 = 0$

Puis cliquer sur les 3 points et demander "résoudre"

On trouve : $x_1 =$ 2 et $x_2 =$ 3

III – Méthode d'utilisation

1) Méthode



Pour quelles valeurs de ***x*** le skieur passe-t-il à 6m de hauteur ?

Il faut résoudre : $-0{,}34x^2+3{,}2x+0{,}03=\cancel{6}$

On transforme : $-6 \quad \cancel{-6}$

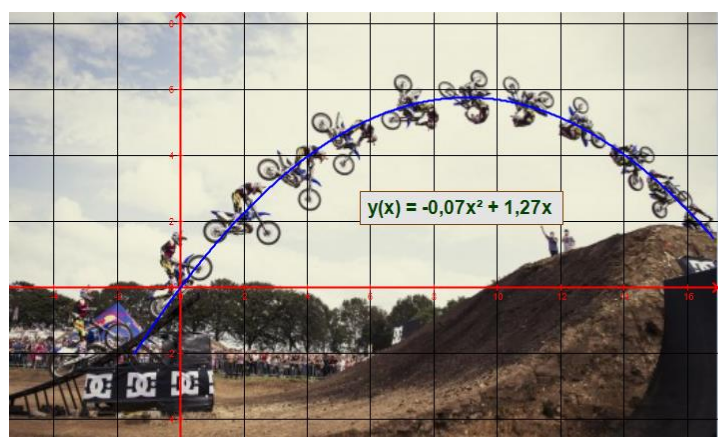
$-0{,}34x^2+3{,}2x-5{,}97=0$

Réponse de geogebra : $x=2{,}56 \quad x=6{,}85$

conclusion : Le skieur passe à 6m de hauteur lorsqu'il est à droite du tremplin à 2,56m et 6,85m

2) Exercice

Déterminer précisément les valeurs de ***x*** pour lesquelles la moto passe à 4m de hauteur.



Il faut résoudre : $-0{,}07x^2+1{,}27x=4$

On transforme : $-4 \quad -4$

$-0{,}07x^2+1{,}27x-4=0$

Réponse de geogebra : $x=4{,}06$ et $x=14{,}09$

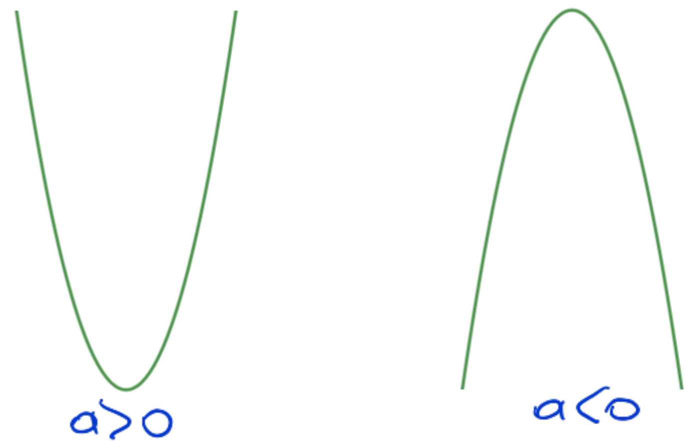
conclusion : La moto passe à 4m de haut lorsqu'elle est à 4,06m puis 14,09m à droite du tremplin

IV – Représentation graphique

La courbe correspondant à un polynôme $ax^2 + bx + c$ est ......une parabole......

Selon le signe de a dans $ax^2 + bx + c$ on peut connaître le sens de la courbe :

Sens de la parabole



V – Calculer un maximum ou un minimum

1) Mode de calcul

Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors

Il y aura un minimum ou un maximum en $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$

<u>Racines de</u> $2x^2 - 10x + 12$: ......$x = 2$ et $x = 3$......

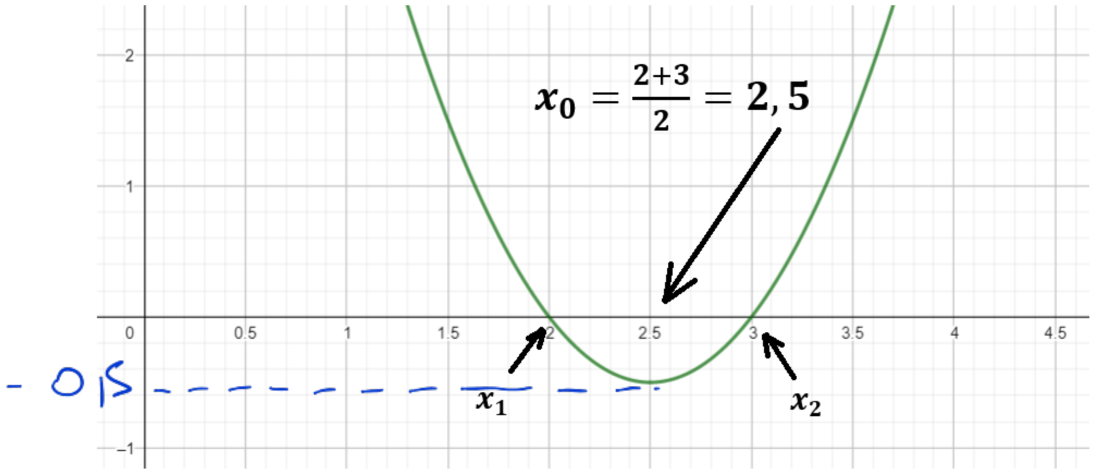
<u>Maximum ou minimum en</u> : ......$x = \frac{2+3}{2} = 2,5$......

<u>Maximum ou minimum ?</u> : ......$a = 2$ donc $a > 0$ c'est un minimum......

<u>Maximum ou minimum en</u> : ......$x = 2,5$......

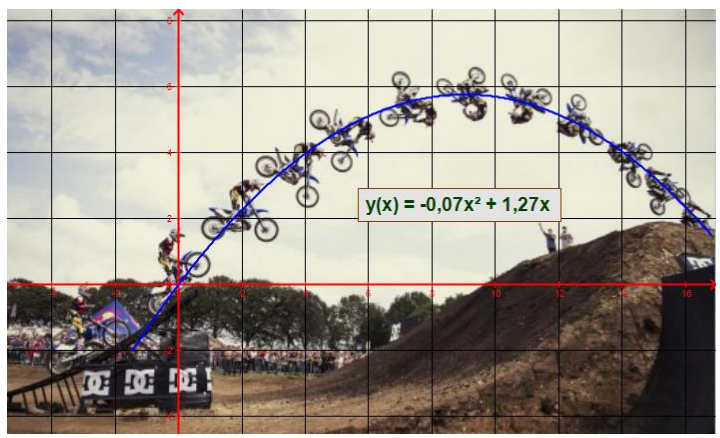
<u>Valeur du maximum ou minimum</u> : ......$2 \times 2,5^2 - 10 \times 2,5 + 12 = -0,5$......

2) Graphiquement



3) Exercice 1

Déterminer précisément la valeur de ***x*** qui donnera la hauteur maximum



Racines $x = 0$ et $x = 18,14$

Maximum ou minimum en :

$\frac{0 + 18,14}{2} = 9,07$

Maximum ou minimum ? : maximum

Maximum ou minimum en : $x = 9,07$

Valeur du maximum ou minimum : $-0,07 \times 9,07^2 + 1,27 \times 9,07 = 5,76$

conclusion : À 9,07 m à droite du décollage, la moto atteint la hauteur maximum de 5,76 m

4) Exercice 2

Pour éviter la surchauffe d'un système, on utilise une thermistance qui est un capteur dont la résistance varie avec la température.

La résistance R, en ohms, varie en fonction de la température T, en degrés Celsius, suivant la relation :

$$R = 0{,}008T^{2} - 0{,}6T + 40.$$

Calculer la valeur de T qui donnera la résistance minimum et déterminer cette résistance minimum :

Racines :

Il n'y a pas de racines, on doit donc utiliser les points spéciaux de geogebra.

Maximum ou minimum en :

37,5

Maximum ou minimum ? : minimum ($a>0$)

Maximum ou minimum en : $x = 37{,}5$

Valeur du maximum ou minimum : $y = 28{,}75$

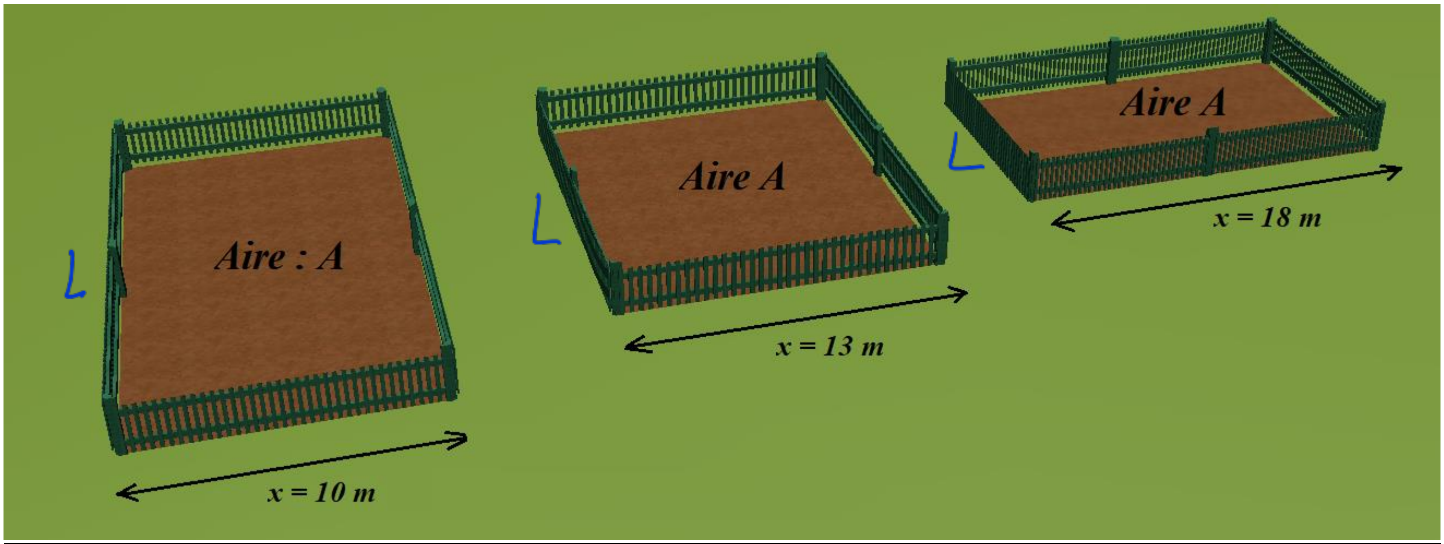
conclusion : La résistance minimum de 28,75 Ω est obtenue pour T = 37,5 °C.

Exercice 3 - L'aire du terrain

Un paysagiste dispose de 50 m de clôture. Il doit clôturer un terrain rectangulaire et se pose la question suivante : Avec ces 50 m de clôture, quelles dimensions de terrain donneront l'aire A maximum ?

On considère que $x \in [\,5\,;\,20\,]$

Exemples de différentes valeurs de x :



On appelle x la largeur du terrain.

1) Si on appelle **L** la longueur du terrain et x sa largeur, que le tour fait 50 m, quelle sera la valeur de x + **L** ?

$x + L = 25\,m$

2) En utilisant ce que vous venez de trouver, exprimer **L** en fonction de x

$L = 25 - x$

3) Exprimer l'aire du terrain en fonction de x

$A = L \times x = (25 - x)\,x$

4) Montrer que ce calcul peut s'écrire : $A = -x^2 + 25\,x$

$(25 - x)\times x = 25\times x - x\times x = 25x - x^2$

$= -x^2 + 25x$

5) Pour quelle valeur de $\boldsymbol{x}$ cette aire sera-t-elle maximum ?

racines : 0 et 25 donc $x_0 = \frac{0+25}{2} = 12,5$

$a = -1$ donc c'est un maximum.

6) Quelle sera alors la valeur de cette aire maximum ?

$A = -x^2 + 25x = -12,5^2 + 25 \times 12,5 = \underline{\underline{156,25 \text{ m}^2}}$

12,5 12,5

…

III – Factoriser un polynôme

Si $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ admet deux racines $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ alors

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Exemple :

racines $x = 2$ et $x = 3$

$\boldsymbol{2x^2-10x+12} = 2(x-2)(x-3)$

V – Signe d'un polynôme

1) **La règle :**

> $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ à l'extérieur des racines

Exemple pour $\boldsymbol{2x^2-10x+12}$: On peut le voir ci-dessus

racines : 2 et 3 et $a = 2$ donc $a > 0$

le résultat sera donc positif avant 2 et après 3,

il sera négatif entre 2 et 3

2) Le tableau des signes :

Il permet de résumer le signe que prend $f(x)$ selon les valeurs de x :

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$: Utiliser les informations de la page précédente pour compléter :

x		2		3	
signe de $f(x)$	+	0	−	0	+

………

………

………

………

Exercices :

Pour chaque polynôme ci-dessous,

1) Déterminer ses racines,

2) En quelle valeur x il admet un minimum ou un maximum

3) Quelle est la valeur de ce minimum ou un maximum.

4) Factoriser ce polynôme

5) Faire son tableau de signes

1) $P(x) = 3x^2 - 9x + 6$
2) $P(x) = x^2 - x - 6$
3) $P(x) = 2x^2 + 28x - 80$

$3x^2-9x+6$

1) racines : 1 et 2

2) minimum en $\frac{1+2}{2} = 1,5$

3) minimum $y = 3\times 1,5^2 - 9\times 1,5 + 6 = -0,75$

4) $3x^2-9x+6 = 3(x-1)(x-2)$

5)

x		1		2	
P	+	0	−	0	+

$x^2 - x - 6$ $\quad a=1 \quad b=-1 \quad c=-6$

1) racines : −2 et 3

2) minimum en $x = \frac{-2+3}{2} = 0,5$

3) minimum $y = 0,5^2 - 0,5 - 6 = -6,25$

4) $x^2-x-6 = 1(x-(-2))(x-3) = (x+2)(x-3)$

5)

x		−2		3	
P	+	0	−	0	+

$2x^2+28x-80$

1) racines −16,43 et 2,43

2) minimum en $x = \frac{-16,43+2,43}{} = -7$

3) $y = 2\times(-7)^2 + 28\times(-7) - 80 = -178$

4) $2x^2+28x-80 = 2(x+16,43)(x-2,43)$

5)

x		−16,43		2,43	
P	+	0	−	0	+