Probabilités

I – Rappels

EXEMPLE :

On lance un dé 200 fois. On obtient 45 fois le 5 :

1) **Probabilité**

La probabilité c'est ce qu'on devrait obtenir : « J'ai combien de chances sur combien d'obtenir un 5 ? »

J'ai une chance sur 6 d'obtenir un 5

Ici, la **probabilité p** d'obtenir le 5 est : $p = \frac{1}{6} \simeq 0{,}17$

2) **Fréquence**

La **fréquence f** c'est ce qu'on a réellement obtenu : « J'ai obtenu 45 fois le 5 sur 200 lancers »

Ici, la **fréquence** obtenue est donc : $f = \frac{45}{200} = 0{,}225$

3) **Effectif (nombre d'épreuves)**

L'**effectif** c'est le nombre de lancers ici, on le note **n** : $n = 200$

EXERCICE : On lance 120 fois une pièce de monnaie. On obtient « face » 64 fois.

1) Quelle est la valeur de n ? effectif : $n = 120$
2) Calculer la probabilité d'obtenir « face » : $p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (50%)
3) Calculer la fréquence obtenue : $f = \frac{64}{120} \simeq 0{,}53$ (53%)

J'avais 1 chance(s) sur 2 d'obtenir « face » donc une probabilité de 0,5 ce qui correspond à 50 % de chances. Je l'ai obtenu 64 fois sur 120 donc avec une frequence de 0,53 ce qui correspond à 53 %.

4) Exercices

Exercice 1

On lance un dé (normal à 6 faces) 400 fois. On obtient le "6"   68 fois.

1) Calculer la probabilité d'obtenir la face "6": $p(\text{"6"}) = \frac{1}{6} = 0{,}17$
2) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair : $p(\text{"impair"}) = \frac{3}{6} = 0{,}5$
3) Calculer la fréquence qu'on a obtenu : $f = \frac{68}{400} = 0{,}17$
4) Pensez-vous qu'on puisse dire que le dé est truqué ? non
5) Expliquez pourquoi : car on trouve la même chose que la probabilité.

Exercice 2

Une urne contient des boules rouges et des boules bleues. On effectue 2000 tirages successifs. On a obtenu 594 boules rouges et 1406 boules bleues.

1) Calculer la fréquence de sortie d'une boule rouge lors de ces 2000 tirages : $f = \frac{594}{2000} = 0{,}297$
2) Peut-on dire qu'il y a plus de boules rouges que de boules bleues dans l'urne ? non, c'est le contraire.

L'urne contient 10 boules au total. Parmi ces deux hypothèses, laquelle vous semble la plus probable ? Pourquoi ?

- **"Il y a 1 boule rouge et 9 boules bleues"**
- **"Il y a 3 boules rouges et 7 boules bleues"**

Il y a 3 boules rouges et 7 boules bleues car cela correspondrait à $p(\text{"boule rouge"}) = \frac{3}{10} = 0{,}3$ et on a obtenu 0,297.

Exercice 3

On lance deux dés et on regarde le score obtenu.

1) Combien y a-t-il de scores possibles (quelles valeurs peut-on obtenir) ?

On peut obtenir de 2 à 12 donc 11 scores possibles.

2) Combien y a-t-il d'issues possibles ?

$6 \times 6 = 36$

3) Combien d'issues différentes donnent le score 7 ?

Il y en a 6.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

II – Calculer une probabilité

1) Vocabulaire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est dû au hasard.

Une issue est un des résultats possible

Un événement est un ensemble d'issues.

Exemple :

On lance un dé (normal à 6 faces)

L'événement « Obtenir un nombre pair » peut se noter de deux façons différentes :

A = " Obtenir un nombre pair "

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$

Cet événement est constitué de 3 issues : 2 ; 4 et 6

2) Calcul de probabilité

Pour calculer une probabilité on utilise le principe :

$$p = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ total}$$

Exemple :

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues.

Calculer p(A) la probabilité de l'événement « Tirer une boule rouge » :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}} = \frac{4}{10} = 0,4 \quad (40\%)$$

III – Intervalle de confiance

On lance un dé 200 fois. On obtient 45 fois le 6 :

Peut-on suspecter ce dé d'être truqué ? pour ce type d'expérience, il existe un résultat mathématique connu :

« Lors d'une expérience aléatoire, la fréquence obtenue a 95% de chances d'être entre $p - \frac{1}{\sqrt{n}}$ *et* $p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ *»*

$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{200}} \simeq 0{,}096$ $\quad$ $p + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{200}} \simeq 0{,}237$

Conclusion :

On a obtenu $f = \frac{45}{200} = 0{,}225$. Ce qui est entre les deux valeurs ci-dessus. "On est dans l'intervalle de confiance" il n'y a donc aucune raison de douter que le dé soit truqué.

Cet intervalle s'appelle l'intervalle de confiance : $\left[\boldsymbol{p - \frac{1}{\sqrt{n}}} \ ; \boldsymbol{p + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right]$

II – Grands effectifs

Dans le premier exemple ci-dessus, si on lance le dé beaucoup plus (200 fois, 1000 fois, 2000 fois…) la fréquence obtenue se rapprochera de la probabilité. C'est toujours comme ça, on dit que :

Quand n augmente, f tend vers p.

Cette propriété a des conséquences importantes :

- Plus je lance une pièce de monnaie, plus je m'approcherai de $f = 0{,}5$
- Plus je lance un dé, plus je m'approcherai de 16,7 % de face 6. (*)

(*) Détail du calcul : $p(\text{"obtenir 6"}) = \frac{1}{6} \simeq 0{,}167$ (16,7%)

<u>**Voici deux exemples d'utilisation de cette propriété dans la vie courante**</u>

- Si un assureur sait qu'en moyenne un accident lui coûte 10 000 € et qu'un véhicule a 0,5% de risques d'avoir un accident dans l'année, alors s'il assure 2000 véhicules, il peut prévoir qu'il y aura :

  $2000 \times \frac{0,5}{100} = 10$ accidents

  Ça lui coûtera donc au total

  $10 \times 10\,000 = 100\,000$ euros.

  S'il ne veut pas perdre d'argent, on peut donc calculer la cotisation de chaque assuré :

  $100\,000 / 2000 = 50$ euros .

  S'il veut encaisser un bénéfice de 200 000 €, de combien doit-il augmenter la cotisation de chaque assuré ?

  coût : $100\,000 + 200\,000 = 300\,000$. $\frac{300\,000}{2000} = 150$ €

  il doit donc augmenter de 100 €

  Ce calcul fonctionne assez bien à condition d'assurer un grand nombre de véhicules.

- Les compagnies aériennes savent que sur certains vols, la totalité des passagers ne se présentent pas à l'embarquement. Un calcul basé sur les statistiques et les probabilités permet de déterminer combien de places on peut vendre en surplus… avec un risque calculé !

Les mathématiciens savent qu'à partir de n = 2000, on peut commencer à appliquer ces types de raisonnements.

Vous pouvez constater cet effet en démarrant le fichier https://www.mathsbrevet.fr/des.xlsx
Appuyez sur le bouton (ou sur F9) beaucoup de fois de suite pour simuler à nouveau les lancers à chaque fois,

Vous verrez que les fréquences se stabilisent à 1 chance sur 6 (1/6=0,17) lorsqu'on augmente le nombre de lancers

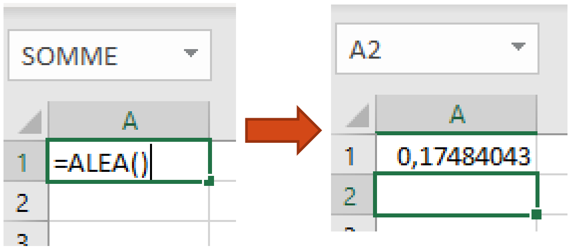
IV – Excel pour simuler le hasard

Les tableurs sont de **formidables** outils de simulation du hasard. Les exemples ci-dessous sont présentés dans Excel mais OpenOffice, LibreOffice et d'autres tableurs dans d'autres logiciels permettent de faire la même chose.

Nous allons simuler ces lancers avec Excel. Si vous disposez d'un PC avec Excel ou un tableur de type libre office, vous pouvez suivre la procédure ci-dessous, sinon, Excel mobile pour android ou iOs permet de faire les exemples présentés : Vous pouvez donc directement travailler sur votre téléphone ! (Le tuto proposé ci-dessous utilise Excel pour android. C'est pareil sur iOs.)

Suivre l'explication ci-dessous (ou le tuto téléphone www.mathsbrevet.fr/tutoProbas1.mp4) et construire le fichier de simulation

1) Simuler le hasard



Cette fonction donnera un nombre au hasard entre ...0...et ...1...
mais 1 n'est jamais atteint (donc entre 0 et 0,999..)

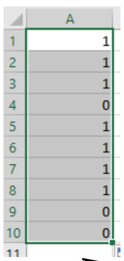
Attention !
Virgule, pas de point !

Si on ajoute 0,5 : on tape **=ALEA() + 0,5** on a donc un nombre au hasard entre ....0,5..... et .....1,5.......

Maintenant, on enlève les chiffres après la virgule avec la fonction ENT : **=ENT(ALEA() + 0,5**)

<u>APPUYEZ SUR F9</u> plusieurs fois de suite : la case A1 contiendra un 1 ou un 0, au hasard ! (**<u>recalculer</u>** dans la version mobile)

F9



Si vous étirez la case A1 10 fois vers le bas, vous obtenez 10 nombres 0 ou 1 au hasard. F9 permet de régénérer ces nombres.

Si un 1 représente ...pile...... et un 0, ...face........ alors on vient de simuler le lancer d'une pièce 10 fois de suite !

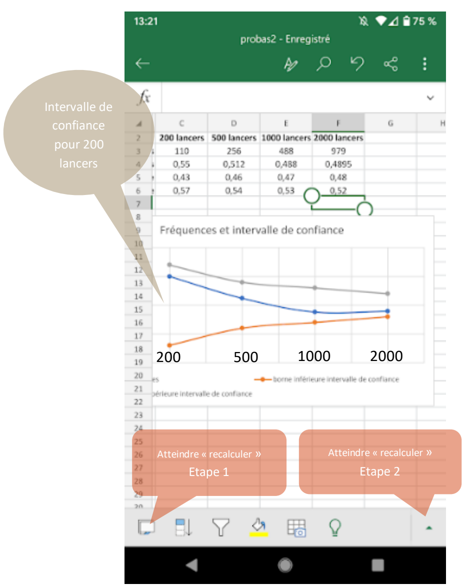
Ajouter =SOMME(A1 :A10)

On compte les 1 en fait !

<u>Tuto téléphone :</u> www.mathsbrevet.fr/tutoProbas1.mp4

<u>EXERCICE</u> :
ouvrir le ficher www.mathsbrevet.fr/probas2.xlsx

Dans cet exemple, on simule le lancer d'une pièce 200, 500, 1000 puis 2000 fois
Appuyez sur F9 (sur un ordinateur) ou « recalculer » sur un téléphone et observer le graphique :
<u>Compléter ci-dessous :</u>



A chaque recalcul, Excel compte et calcule les fréquences obtenues pour 200, 500, 1000 et 2000 lancers.

Les courbes grise et rouge représentent l'intervalle de confiance : on remarque que l'intervalle de confiance est plus ......étroit............. quand le nombre de tirages augmente.

A chaque recalcul, on remarque que les fréquences obtenues .....varient............ on dit qu'elles .....fluctuent........ .

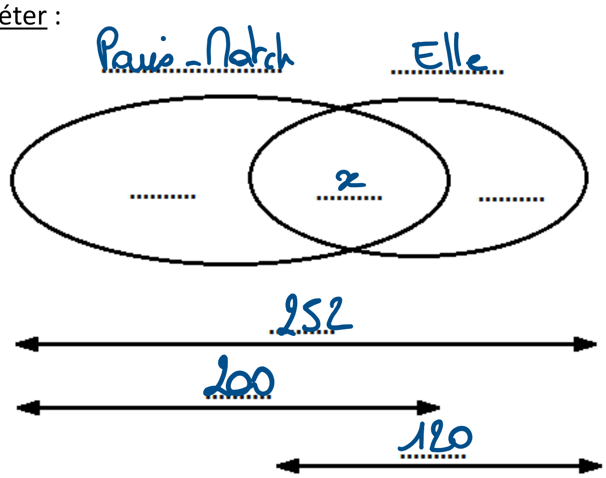
Le cours nous dit que 95% des fréquences obtenues doivent être dans l'intervalle de confiance, cela signifie que si on recalcule 100 fois, on ne devrait obtenir que ......5%........ points en dehors de l'intervalle de confiance.

V – Calculs de probabilités et ensembles

1) Etude d'un exemple

Après avoir regardé l'extrait de film proposé, répondre aux questions ci-dessous :

Compléter :

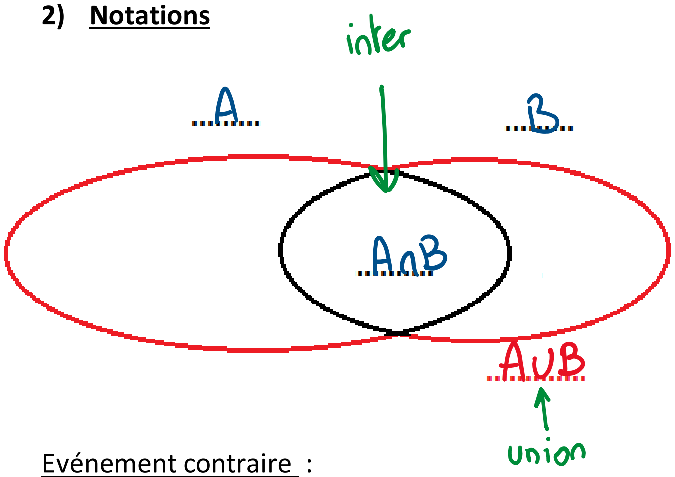


Si on additionne ceux qui lisent PM et ceux qui lisent Elle on compte 2 fois le x.

Donc : $200+120-252=68$

conclusion : 68 personnes lisent Paris-Match et Elle

2) Notations



inter : Eléments de A et B

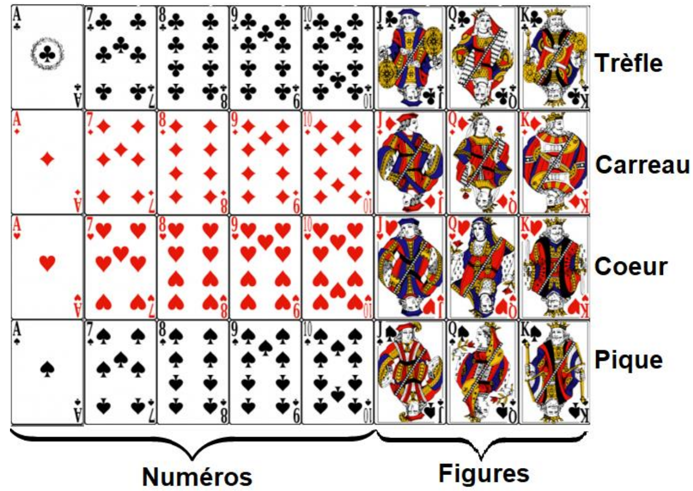
union : Eléments de A ou de B ou les deux à la fois.

Evénement contraire :

On lance un dé. On appelle A = « Obtenir moins de 3 », l'événement contraire de A se note :

$\bar{A}$ = "Obtenir au moins 3"

3) Exercices



1 - On utilise un jeu de 32 cartes. L'as n'est pas considéré comme une figure mais comme un numéro. On tire une carte au hasard.

On note :

A = « Tirer un pique» *B = « Tirer un numéro»*

1) **Faites une phrase correspondant à l'événement $\overline{A}$:**

   $\overline{A}$ = " Tirer autre chose qu'un pique "

2) **Faites une phrase correspondant à l'événement $A \cap B$:**

   $A \cap B$ = " Tirer un numéro de pique "

3) **Calculer les probabilités suivantes :**

   p(A) = $\frac{8}{32}$ = 0,25 (25%)

   p(B) = $\frac{20}{32}$ = 0,625 ≃ 0,63 (63%)

   p($A \cap B$) = $\frac{5}{32}$ = 0,15625 ≃ 0,16 (16%)

4) **Faites une phrase correspondant à l'événement $A \cup B$:**

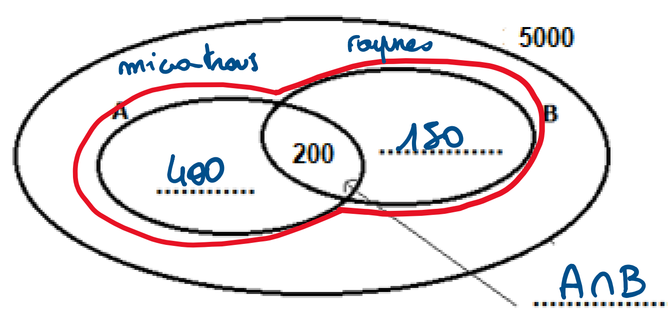
   " Tirer un pique ou un numéro ou les deux à la fois "

5) **Calculer p($A \cup B$)**

   ....

---

2 - Une entreprise fabrique des voitures en grande série. La carrosserie peut présenter les défauts de deux sortes : des micro-trous de peinture et des rayures. Dans un lot de 5000 voitures fabriquées, 200 présentent les deux défauts, 400 uniquement des micro-trous et 150 uniquement des rayures.



On note A l'ensemble des voitures présentant des micro-trous,

On note B l'ensemble des voitures présentant des rayures.

1) **Compléter le schéma ci-contre.**
2) **Entourer en rouge $A \cup B$.**

3) **Compléter le tableau ci-dessous.**

	Rayures B	**Pas de rayures** $\overline{B}$	**TOTAL**
Micro-trous A	200	400	600
Pas de micro-trous $\overline{A}$	150	4250	4400
TOTAL	350	4650	5000

4) **Quelle est la probabilité d'avoir des micro-trous uniquement ?** $\frac{400}{5000} = 0{,}08$

5) **Quelle est la probabilité d'avoir des rayures ?** $\frac{350}{5000} = 0{,}07$

6) **Quelle est la probabilité d'avoir des micro-trous et des rayures ensemble ?** $\frac{200}{5000} = 0{,}04$

7) **Que signifie $p(A \cup B)$?**

C'est la probabilité d'avoir l'un ou l'autre des défauts ou les deux.
En plus simple, c'est donc la probabilité d'avoir un défaut.

8) **Calculer la probabilité qu'une voiture n'ai aucun des deux défauts**

$\frac{4250}{5000} = 0{,}85$ Il y a donc 85% de chances qu'il n'y ait aucun défaut.

VI – Probabilités conditionnelles

Un lycée emploie 200 personnes réparties entre administratifs et professeurs. Il y a 80 administratifs en tout. Sur les 72 hommes 18 sont des administratifs.

1) **Combien y a-t-il de femmes professeur ?**

Il y a donc
66 femmes professeur.

	hommes	femmes	TOTAL
administratifs	18	62	80
professeurs	54	66	120
TOTAL	72	128	200

2) Quel est le pourcentage d'hommes administratifs ?

$\frac{18}{200} = 0,09$ donc 9%

3) Parmi les administratifs, quel est le pourcentage d'hommes ?

$\frac{18}{80} = 0,225$ donc $22,5\%$

4) L'affirmation suivante est-elle vraie : « 25% des hommes sont des administratifs » ?

$\frac{18}{72} = 0,25$ soit 25%. C'est donc vrai.

Dans les questions 3 et 4 il s'agit de probabilités conditionnelles.

Si on appelle ***A = " L'employé est un homme"*** *et* ***B = " L'employé est un administratif"***

<u>Question 3</u> : Parmi les administratifs, quel est le pourcentage d'hommes ?

Il s'agit de la probabilité qu'un employé soit un homme sachant qu'il est administratif

On le note : $P_B(A)$ ($P(A)$ sachant B)

<u>Question 4</u> : L'affirmation suivante est-elle vraie : « 25% des hommes sont des administratifs » ?

Il s'agit de la probabilité qu'un employé soit un administratif sachant que c'est un homme

On le note : $P_A(B)$ ($P(B)$ sachant A)

Dans le tableau à double entrée servant à trouver les réponses, une probabilité conditionnelle se calcule en sélectionnant une ligne ou une colonne. (voir les lignes sélectionnées en couleur)