

Les polynômes du second degré

I – Définition

Polynôme du second degré

Un polynôme du second degré est une fonction du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemple :

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

Dans ce cas on a $a = 2$ $b = -10$ $c = 12$

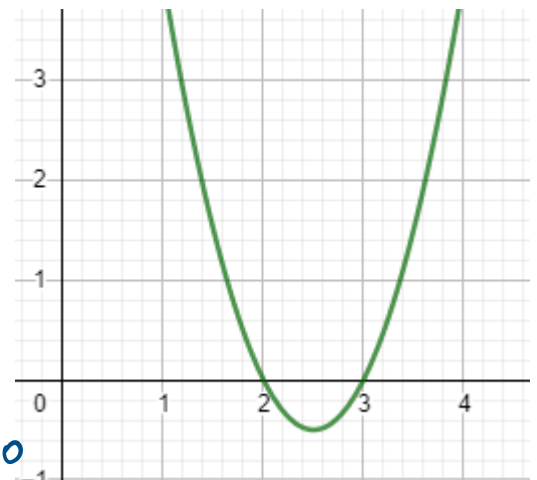
II – Racines

On appelle **racine** d'un polynôme du second degré :

une valeur de x qui donne 0
comme résultat

$$2x^2 - 10x + 12$$

Quand on cherche ces racines on "résout" $2x^2 - 10x + 12 = 0$



Utiliser "Numwoks" et résoudre $2x^2 - 10x + 12 = 0$

On trouve : $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$

III – Méthode d'utilisation

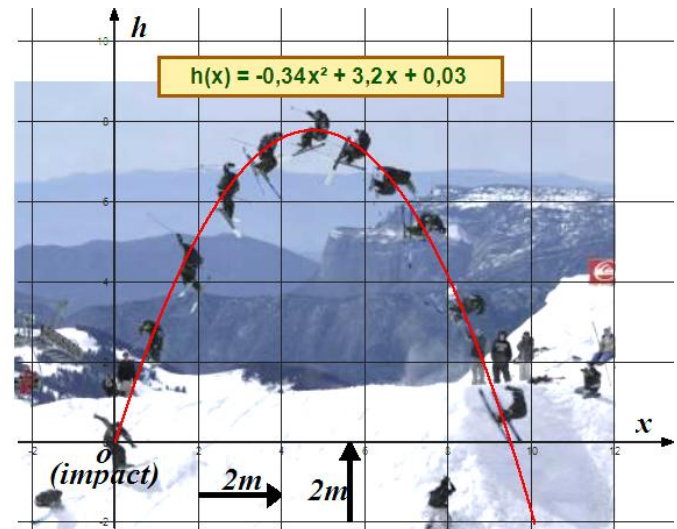
1) Méthode

Pour quelles valeurs de x le skieur passe-t-il à 6m de hauteur ?

Réponse de Numworks :

$$x = 2,56$$

$$x = 6,85$$



conclusion : À 2,56 m à droite et 6,85 m à droite du décollage, le skieur passe à 6m de hauteur.

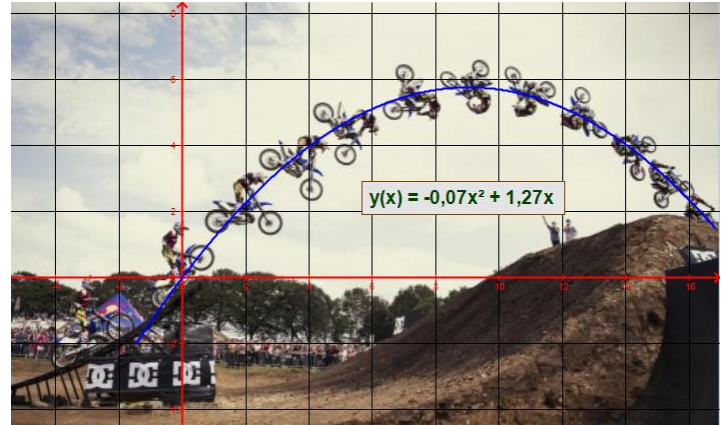
2) Exercice

Déterminer précisément les valeurs de x pour lesquelles la moto passe à 4m de hauteur.

Réponse de Numworks :

$$x = 4,06$$

$$x = 14,09$$



conclusion : À 4,06 m et 14,09 m à droite du décollage, la moto passe à 4 m de hauteur.

IV – Représentation graphique

La courbe correspondant à un polynôme $ax^2 + bx + c$ estune parabole.....

Selon le signe de a dans $ax^2 + bx + c$ on peut connaître le sens de la courbe :

Sens de la parabole

le signe de a donne
le sens de la
parabole



$a > 0$



$a < 0$

V – Calculer un maximum ou un minimum

1) Mode de calcul

Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors

Il y aura un minimum ou un maximum en $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$

2^e méthode :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Racines de $2x^2 - 10x + 12$: $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$

Maximum ou minimum en : $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$

Maximum ou minimum ? : minimum car $a > 0$

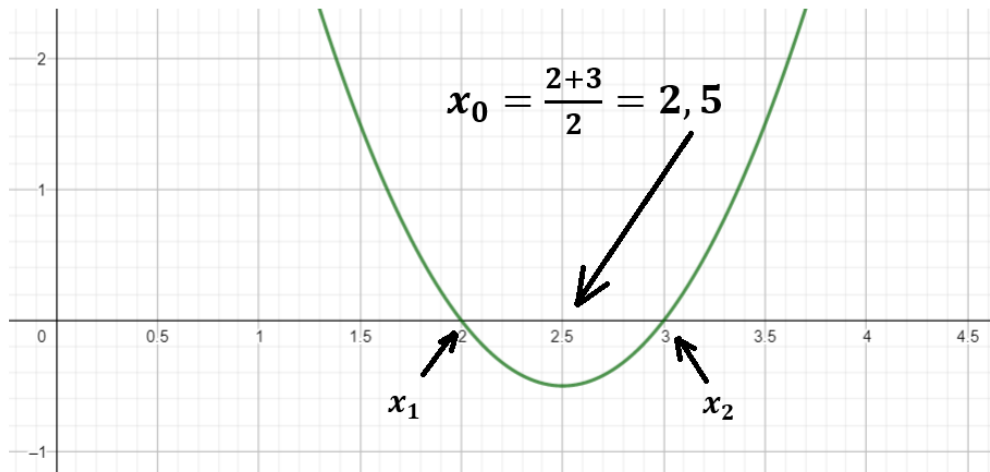
Valeur du maximum ou minimum : $2,5$ $2,5$

$$2x^2 - 10x + 12$$

$$= 2 \times 2,5^2 - 10 \times 2,5 + 12 = -0,5$$

le minimum est donc $y = -0,5$

2) Graphiquement



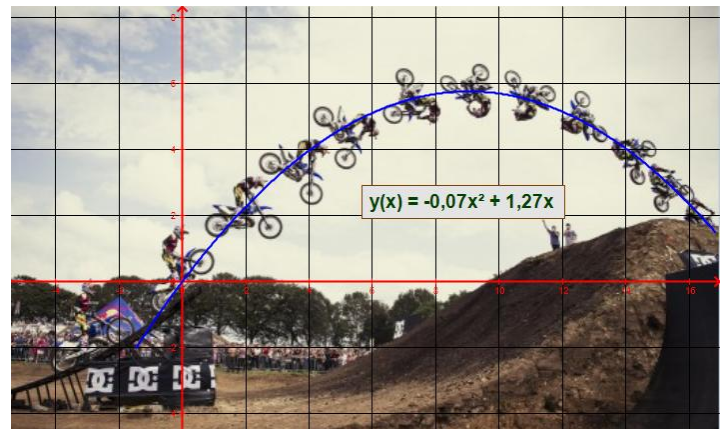
3) Exercice 1

Déterminer précisément la valeur de x qui donnera la hauteur maximum

Racines $x_1 = 0$ $x_2 = 18,14$

Maximum ou minimum en :

$$x_0 = \frac{0 + 18,14}{2} = 9,07$$



Maximum ou minimum ? : maximum (-0,07 est négatif)

Valeur du maximum ou minimum :

$$y(9,07) = -0,07 \times 9,07^2 + 1,27 \times 9,07 \approx 5,76$$

conclusion : À 9,07 m de l'arrêt du décollage, la moto atteint sa hauteur maximum de 5,76 m.

4) Exercice 2

Pour éviter la surchauffe d'un système, on utilise une thermistance qui est un capteur dont la résistance varie avec la température.

La résistance R , en ohms, varie en fonction de la température T , en degrés Celsius, suivant la relation :



$$R = 0,008T^2 - 0,6T + 40.$$

Calculer la valeur de T qui donnera la résistance minimum et déterminer cette résistance minimum :

Racines : Il n'y en a pas mais il y a une autre méthode

Maximum ou minimum en :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \text{ donne } x_0 : x_0 = \frac{-(-0,6)}{2 \times 0,008} = 37,5$$

Maximum ou minimum ? : minimum (0,008 est positif)

Valeur du maximum ou minimum :

$$R(37,5) = 0,008 \times 37,5^2 - 0,6 \times 37,5 + 40 = 28,75$$

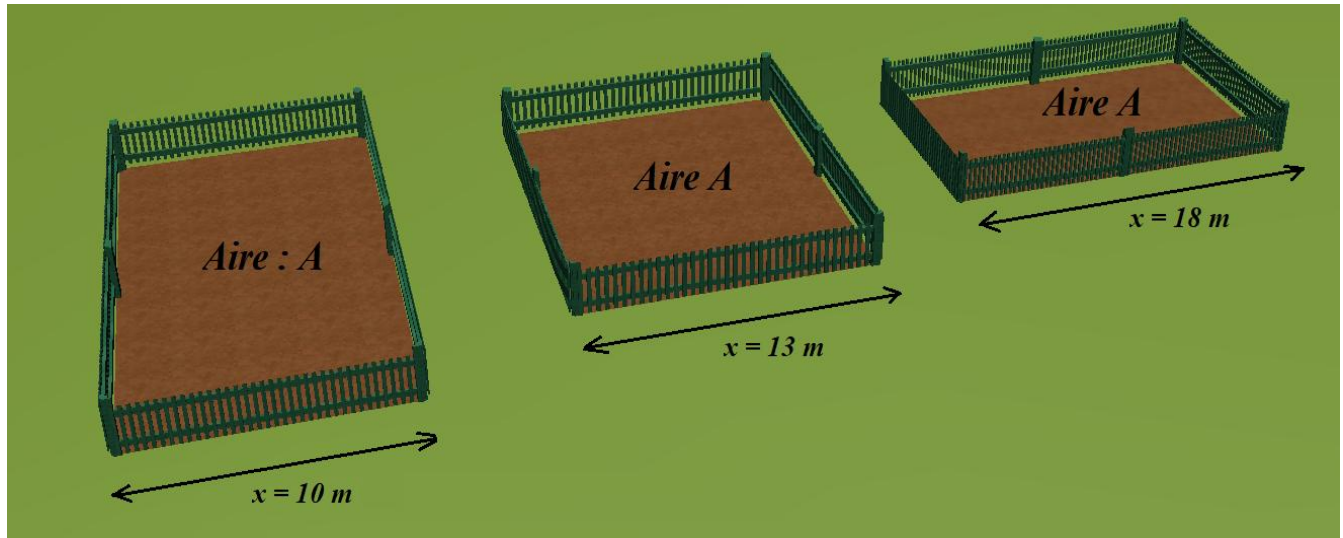
conclusion : Pour la température de $37,5^\circ\text{C}$ la thermistance atteint sa résistance minimum de $28,75 \Omega$

Exercice 3 - L'aire du terrain

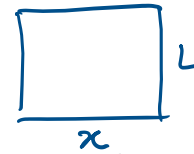
Un paysagiste dispose de 50 m de clôture. Il doit clôturer un terrain rectangulaire et se pose la question suivante : Avec ces 50 m de clôture, quelles dimensions de terrain donneront l'aire A maximum ?

On considère que $x \in [5 ; 20]$

Exemples de différentes valeurs de x :



On appelle x la largeur du terrain.



- 1) Si on appelle L la longueur du terrain et x sa largeur, que le tour mesure 50 m, quelle sera la valeur de $x + L$?

$$x + L = 25$$

- 2) En utilisant ce que vous venez de trouver, exprimer L en fonction de x

$$L = 25 - x$$

- 3) Exprimer l'aire du terrain en fonction de x

$$A = x \times L = x \times (25 - x)$$

- 4) Montrer que ce calcul peut s'écrire : $A = -x^2 + 25x$

$$x(25 - x) = 25x - x^2 = -x^2 + 25x$$

5) Pour quelle valeur de x cette aire sera-t-elle maximum ?

$$A(x) = -x^2 + 25x \quad : \text{ racines : } 0 \text{ et } 25$$

$$\text{donc } x_0 = \frac{0+25}{2} = 12,5 \quad \text{ l'aire sera maximum pour } x = 12,5$$

6) Quelle sera alors la valeur de cette aire maximum ?

$$A(12,5) = -12,5^2 + 25 \times 12,5 = 156,25$$

$$\text{ l'aire maximum sera donc de } 156,25 \text{ m}^2$$

III – Factoriser un polynôme

Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Exemple :

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$$

V – Signe d'un polynôme

1) La règle :

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$: On peut le voir ci-dessus

Le polynôme donne donc un résultat positif avant 2 et après 3 et négatif entre 2 et 3.

2) Le tableau des signes :

Il permet de résumer le signe que prend $f(x)$ selon les valeurs de x :

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$: Utiliser les informations de la page précédente pour compléter :

x	2		3	
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0

$a > 0$ donc

Exercices :

Pour chaque polynôme ci-dessous,

- 1) Déterminer ses racines,
- 2) En quelle valeur x il admet un minimum ou un maximum
- 3) Quelle est la valeur de ce minimum ou un maximum.
- 4) Factoriser ce polynôme
- 5) Faire son tableau de signes

- 1) $P(x) = 3x^2 - 9x + 6$
- 2) $P(x) = x^2 - x - 6$
- 3) $P(x) = 2x^2 + 28x - 80$

$$P(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

1) racines : 1 et 2

2) minimum en $\frac{1+2}{2} = 1,5$

3) minimum $y = 3 \times 1,5^2 - 9 \times 1,5 + 6 = -0,75$

4) $3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$

5)

x	1	2
P	+	-

$$P(x) = x^2 - x - 6$$

1) racines : -2 et 3

2) minimum en $\frac{-2+3}{2} = 0,5$

3) minimum $y = 0,5^2 - 0,5 - 6 = -6,25$

4) $x^2 - x - 6 = 1(x - (-2))(x - 3) = (x+2)(x-3)$

5)

x	-2	3
P	+	-

$$P(x) = 2x^2 + 28x + 80$$

1) racines : -16,43 et 2,43

2) minimum en $\frac{-16,43 + 2,43}{2} = -7$

3) minimum $y = 2 \times (-7)^2 + 28 \times (-7) - 80 = -128$

4) $2x^2 + 28x - 80 = 2(x + 16,43)(x - 2,43)$

5)

x	-16,43	2,43
P	+	-