

Les polynômes du second degré

I – Définition

Polynôme du second degré

Un polynôme du second degré est une fonction du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemple :

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

Dans ce cas on a $a = \underline{\dots 2\dots}$ $b = \underline{-10\dots}$ $c = \underline{12\dots}$

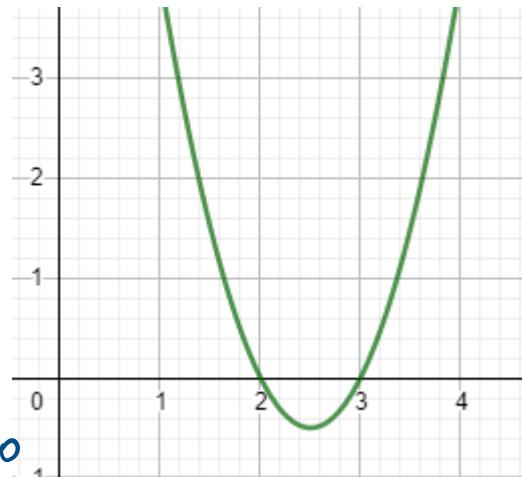
II – Racines

On appelle racine d'un polynôme du second degré :

une valeur de x qui donne 0 comme résultat

$$2x^2 - 10x + 12$$

Quand on cherche ces racines on "résout" $\underline{2x^2 - 10x + 12 = 0}$



Utiliser "Numwoks" et résoudre $2x^2 - 10x + 12 = 0$

On trouve : $x_1 = \underline{2\dots}$ et $x_2 = \underline{3\dots}$

III – Méthode d'utilisation

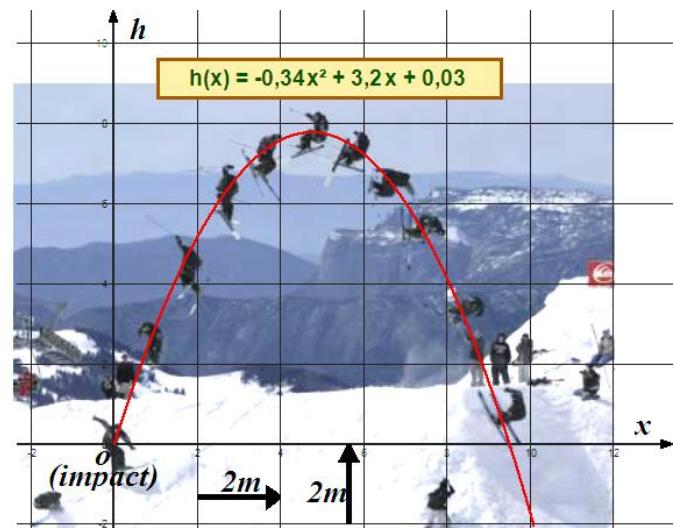
1) Méthode

Pour quelles valeurs de x le skieur passe-t-il à 6m de hauteur ?

Réponse de Numworks :

$$x = 2,56$$

$$x = 6,85$$



conclusion : À 2,56 m à droite et 6,85 m à droite du décollage, le skieur passe à 6m de hauteur.

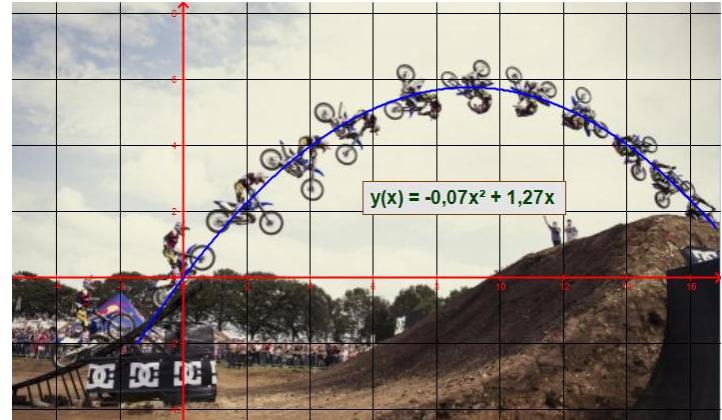
2) Exercice

Déterminer précisément les valeurs de x pour lesquelles la moto passe à 4m de hauteur.

Réponse de Numworks :

$$x = 6,06$$

$$x = 14,09$$



conclusion : À 6,06 m et 14,09 m à droite du décollage, la moto passe à 4m de hauteur.

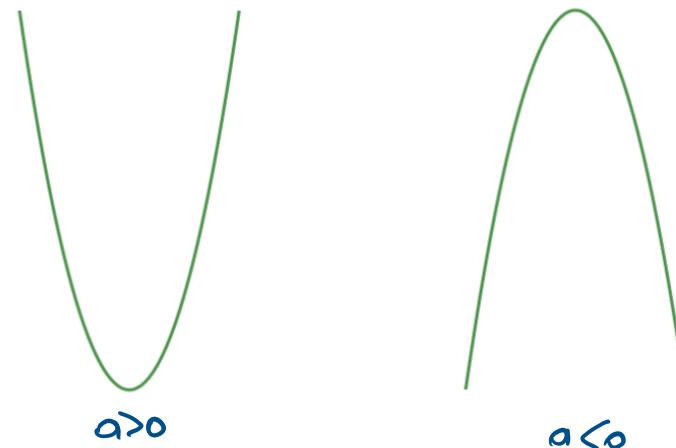
IV – Représentation graphique

La courbe correspondant à un polynôme $ax^2 + bx + c$ est une parabole

Selon le signe de a dans $ax^2 + bx + c$ on peut connaître le sens de la courbe :

Sens de la parabole

le signe de a donne
le sens de la
parabole



V – Calculer un maximum ou un minimum

1) Mode de calcul

Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors

$$\text{Il y aura un minimum ou un maximum en } x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$

2^e méthode :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Racines de $2x^2 - 10x + 12$: $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$

$$\text{Maximum ou minimum en : } x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

Maximum ou minimum ? : minimum car $a > 0$

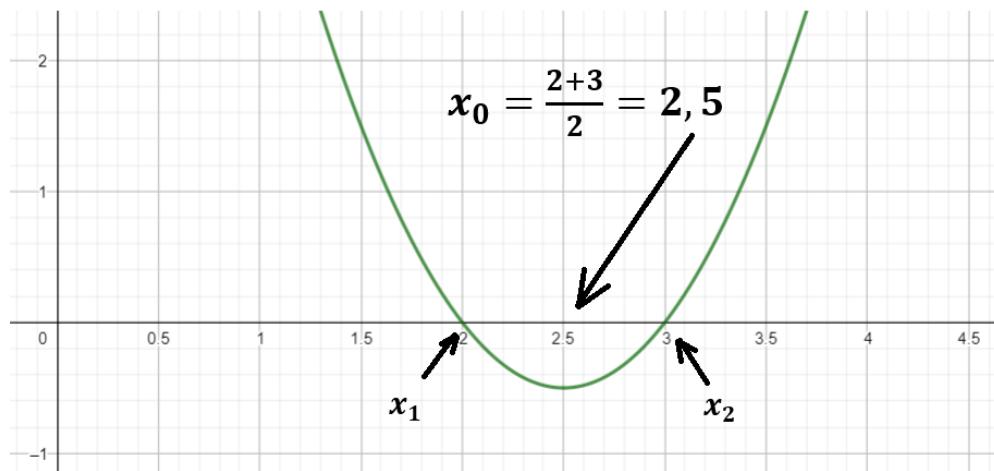
Valeur du maximum ou minimum :

$$2x^2 - 10x + 12$$

$$= 2 \times 2,5^2 - 10 \times 2,5 + 12 = -0,5$$

Le minimum est donc $y = -0,5$

2) Graphiquement



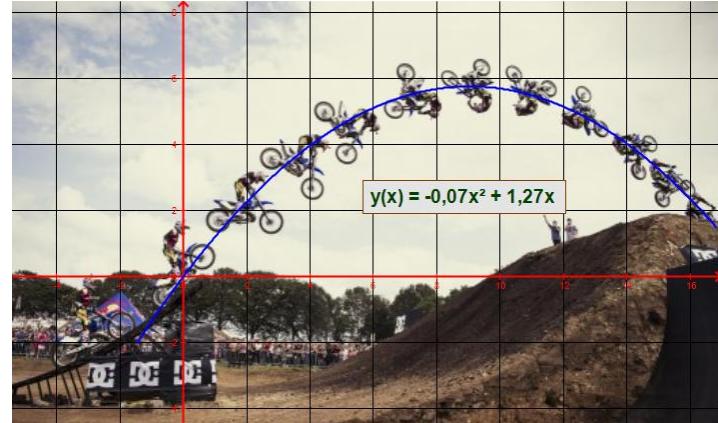
3) Exercice 1

Déterminer précisément la valeur de x qui donnera la hauteur maximum

Racines $x_1 = 0$ $x_2 = 18,14$

Maximum ou minimum en :

$x_0 = \frac{0 + 18,14}{2} \approx 9,07$



Maximum ou minimum ? : maximum (-0,07 est négatif)

Valeur du maximum ou minimum :

$y(9,07) = -0,07 \times 9,07^2 + 1,27 \times 9,07 \approx 5,76$

conclusion : À 9,07 m à droite du décollage, la moto atteint sa hauteur maximum de 5,76 m.

4) Exercice 2

Pour éviter la surchauffe d'un système, on utilise une thermistance qui est un capteur dont la résistance varie avec la température.

La résistance R, en ohms, varie en fonction de la température T, en degrés Celsius, suivant la relation :



$$R = 0,008T^2 - 0,6T + 40.$$

Calculer la valeur de T qui donnera la résistance minimum et déterminer cette résistance minimum :

Racines..... Il n'y en a pas mais il y a une autre méthode

Maximum ou minimum en :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \text{ donne } x_0 : x_0 = \frac{-(-0,6)}{2 \times 0,008} = 37,5$$

Maximum ou minimum ? : minimum (0,008 est positif)

Valeur du maximum ou minimum :

$$R(37,5) = 0,008 \times 37,5^2 - 0,6 \times 37,5 + 40 = 28,75$$

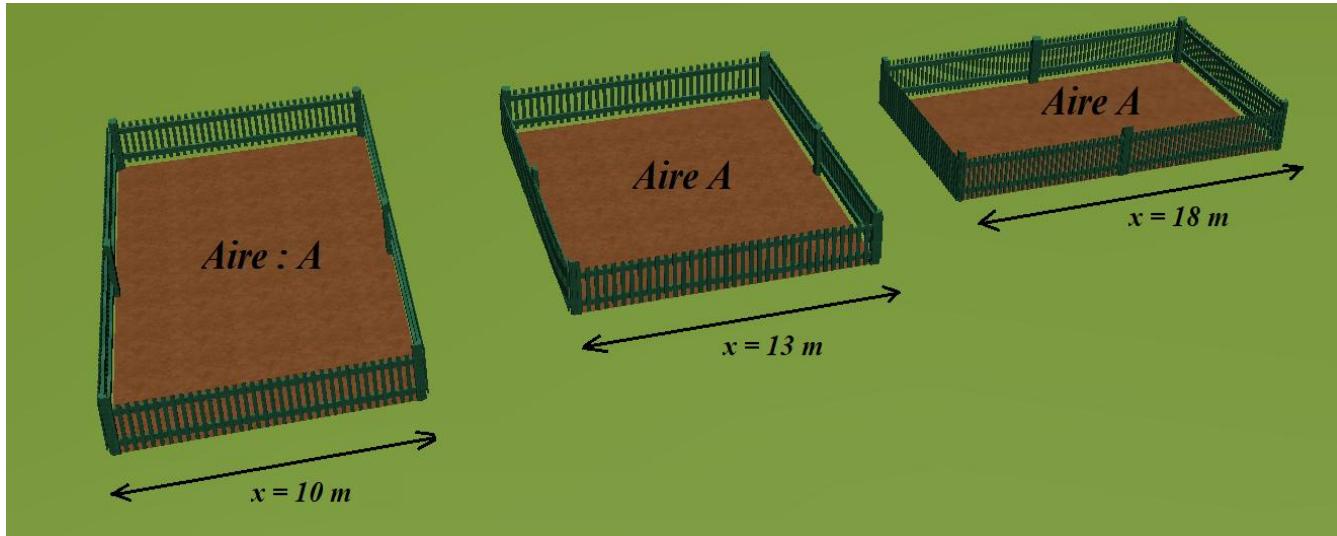
Conclusion : Pour la température de 37,5°C la thermistance atteint sa résistance minimum de 28,75 Ω

Exercice 3 - L'aire du terrain

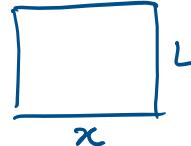
Un paysagiste dispose de 50 m de clôture. Il doit clôturer un terrain rectangulaire et se pose la question suivante : Avec ces 50 m de clôture, quelles dimensions de terrain donneront l'aire A maximum ?

On considère que $x \in [5 ; 20]$

Exemples de différentes valeurs de x :



On appelle x la largeur du terrain.



- 1) Si on appelle L la longueur du terrain et x sa largeur, que le tour mesure 50 m, quelle sera la valeur de $x + L$?

$$x + L = 25$$

- 2) En utilisant ce que vous venez de trouver, exprimer L en fonction de x

$$L = 25 - x$$

- 3) Exprimer l'aire du terrain en fonction de x

$$A = x \times L = x \times (25 - x)$$

- 4) Montrer que ce calcul peut s'écrire : $A = -x^2 + 25x$

$$x(25-x) = 25x - x^2 = -x^2 + 25x$$

- 5) Pour quelle valeur de x cette aire sera-t-elle maximum ?

$$A(x) = -x^2 + 25x \quad \text{racines : } 0 \text{ et } 25$$

$$\text{donc } x_0 = \frac{0+25}{2} = 12,5 \quad \text{l'aire sera maximum pour } x=12,5$$

- 6) Quelle sera alors la valeur de cette aire maximum ?

$$A(12,5) = -12,5^2 + 25 \times 12,5 = 156,25$$

l'aire maximum sera donc de $156,25 \text{ m}^2$

III – Factoriser un polynôme

Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$

Exemple :

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$$

V – Signe d'un polynôme

- 1) La règle :

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$: On peut le voir ci-dessus

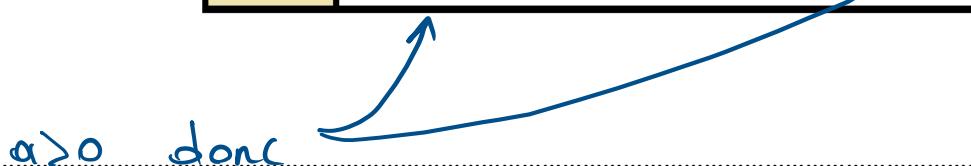
Ce polynôme donne donc un résultat positif avant 2 et après 3 et négatif entre 2 et 3.

2) Le tableau des signes :

Il permet de résumer le signe que prend $f(x)$ selon les valeurs de x :

Exemple pour $2x^2 - 10x + 12$: Utiliser les informations de la page précédente pour compléter :

x	2	3
signe de $f(x)$	+	0



Exercices :

Pour chaque polynôme ci-dessous,

- 1) Déterminer ses racines,
- 2) En quelle valeur x il admet un minimum ou un maximum
- 3) Quelle est la valeur de ce minimum ou un maximum.
- 4) Factoriser ce polynôme
- 5) Faire son tableau de signes

1) $P(x) = 3x^2 - 9x + 6$

2) $P(x) = x^2 - x - 6$

3) $P(x) = 2x^2 + 28x - 80$

$$P(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

1) racines : 1 et 2

2) minimum en $\frac{1+2}{2} = 1,5$

3) minimum $y = 3 \times 1,5^2 - 9 \times 1,5 + 6 = -0,75$

4) $3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$

x	1	2	
P	+	0	+

$$P(x) = x^2 - x - 6$$

1) racines : -2 et 3

2) minimum en $\frac{-2+3}{2} = 0,5$

3) minimum $y = 0,5^2 - 0,5 - 6 = -6,25$

4) $x^2 - x - 6 = 1(x - (-2))(x - 3) = (x+2)(x-3)$

x	-2	3	
P	+	0	+

$$P(x) = 2x^2 + 28x + 80$$

1) racines : -16,43 et 2,43

2) minimum en $\frac{-16,43 + 2,43}{2} = -7$

3) minimum $y = 2 \times (-7)^2 + 28 \times (-7) - 80 = -178$

4) $2x^2 + 28x + 80 = 2(x + 16,43)(x - 2,43)$

x	-16,43	2,43	
P	+	0	+